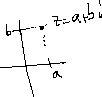
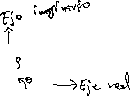
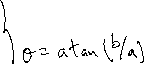
# Teoría de Variable Compleja

## El plano complejo

Un punto del plano complejo z se puede representar de dos maneras:



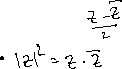
Para pasar de una a otra representación usamos:



El **conjugado** de un número complejo es . Es el simétrico respecto al eje real.



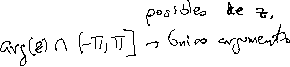
Algunas **identidades útiles**:



**Raíces** de un número complejo: si z es un número complejo, decimos que w es una raíz enésima de z si wn=z. Dado un número complejo z (distinto de cero), existen n raíces distintas:

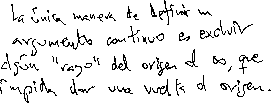


**Argumento** y **argumento principal**: dado



Por su propia definición, el argumento principal, o rama principal del argumento, no está definido en el semieje real negativo.

Es decir, el dominio de Arg(z) es el siguiente:



**Topología** del plano complejo: dado diremos que:



* Es **abierto** si



* Es **conexo** si no existen dos abiertos, U y V, tal que:



* Es **dominio** si es abierto y conexo.
* Es **simplemente conexo** si toda curva dentro de D se puede contraer de manera continua a un único punto (intuitivamente, si no tiene “agujeros”).

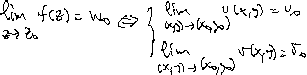
## Funciones de variable compleja

Sea Se puede expresar f en forma binómica:



Es decir, las funciones entre números complejos se pueden ver como funciones de R2 en R2 (o como campos vectoriales).

Las nociones de límite y continuidad son las análogas a las de variable real:



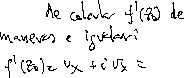
La derivabilidad, sin embargo, presenta una diferencia sustancial respecto a la analogía con la variable real.

Diremos que f es **derivable** en z0 si existe el siguiente límite, al que denominaremos f’(z0):



Propiedades de la derivada compleja:

* f derivable en z0 => f continua en z0
* f derivable en z0 => f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en z0, a saber:



* Hay un recíproco del anterior:



Diremos que una f función f es **analítica** (u holomorfa) en z0 si existe un entorno U de z0 en el que f es derivable en todos los puntos.

**Teorema**: Si f es una función compleja y D es un dominio, entonces, f analítica en D => f’ analítica en D. En particular, si f tiene una derivada, es infinitamente derivable (lo que es un gran contraste con la situación en variable real).

**Teorema** (**principio de los ceros aislados**): los ceros de una función analítica son aislados. Es decir, si f es analítica en un dominio D, y z0 es un cero de f, existe r>0 tal que f no se anula en B(z0,r)



Definición: Si f es analítica en todo el plano, se dice que la función es **entera**.

Algunas funciones importantes:

Es una función:



* Entera.
* Periódica de periodo



Nota: el teorema de los ceros aislados permite extender identidades reales a todo el plano complejo. Por ejemplo, si sabemos que como ambos lados de la igualdad son funciones analíticas, la igualdad debe ser válida en todo el plano complejo.



Definición: se dice **armónica** si satisface la ecuación de Laplace, esto es, si



**Teorema**: sea f una función compleja. Entonces:

En ese caso, se dice que u es la armónica conjugada de v.



**Recíproco del teorema**: Si D es un dominio simplemente conexo, y u es una función armónica en D, existe una armónica conjugada v tal que u+iv es analítica en D.

## Funciones multivaluadas

**Logaritmo**: de manera análoga a lo que ocurre con el argumento, existe el logaritmo “total” o conjunto de todos los logaritmos, y las ramas del logaritmo, siendo la rama principal la más destacada:

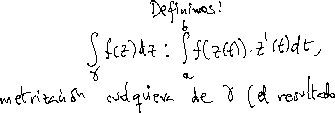
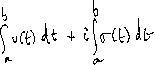


**Potencia**: se define usando el logaritmo y la exponencial:



## Integración compleja

Comenzamos definiendo la integral de línea a través de una curva en el plano complejo, para luego definir la integral a lo largo de un camino de una función compleja.



**Definición**: Sea f una función continua en un dominio D. Decimos que una función F es una **primitiva** de f si F es una función analítica en D tal que, para todo z en D, F’(z) = f(z).

Propiedades y teoremas:



* Si f es una función continua en D, son equivalentes:
  + f tiene primitiva en D, F.



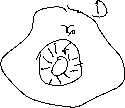
* + Dado un camino en D, que lleva de z0 a z1, se cumple:



* De hecho, en las condiciones del teorema anterior, puede definirse la primitiva F como:



**Teorema** (**Invarianza de la deformación**): Si f es analítica en D, y son dos caminos homotópicos cerrados en D (pueden deformarse el uno en el otro), entonces:



**Teorema** (**Cauchy-Goursat**): Si f es analítica en D, con D dominio simplemente conexo, entonces En particular, existe primitiva de f en D.



Nota: este teorema puede servir para calcular, dada una función f, una rama de log(f) (y por tanto de una potencia de f, fa). Para ello, se busca una primitiva de f’/f, ya que la derivada de log(f) sería f’/f, en caso de existir. Por tanto, si f es analítica en D, con D simplemente conexo, y f no se anula en D, siempre va a tener un logaritmo.

**Fórmula de Cauchy**: (Es un caso particular de la fórmula de los residuos): Sea f analítica en D, z0 en D, y sea un camino cerrado simple (sólo da una vuelta) y orientado positivamente (en el sentido antihorario), tal que z0 es interior al camino. Entonces:



**Teorema** (**Morera**): Si f es continua en D y f es analítica en D.



## Series de potencias

**Definición**: Una serie de potencias centrada en z0 es una suma con la siguiente expresión:



**Teorema**: Dada una serie de potencias, existe un R (**radio de convergencia**) tal que:

1. La serie converge



1. La serie diverge



1. Para los puntos en el borde del disco, puede converger o divergir.
2. la convergencia es uniforme. Esto último permite integrar o derivar la serie término a término.



**Teorema**:



**Teorema**:



1. f(z) es continua y analítica en D.
2. La integración y derivación de f puede hacerse término a término, como si f fuera un polinomio.



**Teorema** (**toda función analítica tiene un desarrollo en serie de potencias**): Si f es analítica en un disco centrado en z0, de radio R, entonces:



Es decir, ser analítica en un disco de radio R, centrado en z0, equivale a tener un desarrollo en serie de potencias que converge, al menos, hasta el radio R (el radio de convergencia de la serie anterior es, como mínimo, R). Además, el desarrollo en serie es único.

**Definición** (**serie de Laurent**): Sea f una función analítica en una corona circular centrada en z0, con radios r y R (admitimos r=0 como posibilidad, en ese caso se dice a veces “disco agujereado”, así como R=infinito). Entonces:



**Teorema**: La serie de Laurent converge en el anillo, y además converge uniformemente en cualquier subanillo cerrado dentro del anillo (lo que permite, como antes, integrar y derivar término a término).

## Ceros y singularidades

**Definición**: Sea f analítica en z0. Decimos que z0 es un **cero de orden m** si:



**Teorema**: Sea f analítica en z0. Son equivalentes:

1. z0 es un cero de orden m.
2. Existe g(z) analítica en z0, con g(z0) ≠ 0, tal que:



**Definición**: Decimos que z0 es una singularidad de f cuando f no está definida en z0, pero sí en puntos tan cercanos como se quiera a z0. Esto permite hablar del comportamiento de f cerca de z0 y clasificar la singularidad.

**Clasificación de singularidades**:



* Aisladas:



* + Evitables. Se puede extender f a una función analítica en z0.



* + Polo de orden m.



* + Esencial. En el caso anterior, el límite es infinito.



* No aisladas: Todo entorno de la singularidad contiene otras singularidades.

## Residuos

**Definición**: sea z0 una singularidad aislada de f. Entonces, definimos el **residuo de f en z0** como:



Es decir, el residuo es el término de la serie de Laurent que acompaña a



Regla de cálculo para algunos residuos:



**Teorema de los residuos**: Sea f analítica en D (salvo un número finito de singularidades), sea una curva cerrada en D que no pasa por las singularidades. Entonces:



En particular, si la curva es cerrada simple y orientada positivamente, la fórmula se simplifica a:



**Definición** (**residuo en el infinito**): , con C una

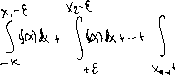


circunferencia orientada positivamente que contenga a todas las singularidades de f.

**Proposición**:



**Definición** (**Valor Principal Integral Impropia**): Sea f una función real, con singularidades en un número finito de puntos x1, x2,…, xk. Entonces:



Estas integrales pueden calcularse usando residuos, en el plano complejo, teniendo en cuenta que si z0 es una singularidad aislada en el eje real (Im(z0)=0), y es la semicircunferencia de radio



El teorema de los residuos y la siguiente observación complementan a lo anterior, para poder realizar el cálculo de integrales reales usando funciones analíticas en el plano complejo:

